<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ</u>

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

2018

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι “1-1” είναι και γνησίως μονότονη.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής , ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ με $x\in\mathbb{R}$ έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου.

β) Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ , η οποία είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\Delta$.

γ) Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$.

δ) Αν η f είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$.

ε) Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-\dfrac{4}{x^2}$, $x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

Β1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα .

Μονάδες 8

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 4

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Β4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(**Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό με μελάνι που δε σβήνει.**)

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8 m, το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους x m, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.

Γ1. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του x, είναι

$$E(x)=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi},\ x\in(0,8).$$

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

Μονάδες 10

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8 m, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με 5 m^2.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2e^{x-\alpha}-x^2,\ x\in\mathbb{R}$ με $\alpha>1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του $\alpha>1$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

Μονάδες 3

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τέτοια ώστε η συνάρτηση f να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2.

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=f(1)$ είναι αδύνατη στο (α, x_2).

Μονάδες 6

Δ4. Αν $\alpha=2$ να αποδείξετε ότι :

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,\mathrm{dx}>-\frac{32}{15}.$$

Μονάδες 9

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, σελ. 99 σχολικού βιβλίου.

Α2. **α**. Λάθος.

β. Διότι για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$ είναι 1–1, αλλά όχι γνησίως μονότονη.

Α3. Θεωρία, σελ. 216 σχολικού βιβλίου.

Α4. **α.** Λάθος, **β.** Λάθος, **γ.** Σωστό, **δ.** Σωστό, **ε.** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}-\{0\}$, είναι:

$$f'(x)=\left(x-\frac{4}{x^2}\right)'=(x)'-4\left(\frac{1}{x^2}\right)'=1-4\left(\frac{-2x}{x^4}\right)=$$

$$=1+\frac{8}{x^3}=\frac{x^3+2^3}{x^3}=\frac{(x+2)\cdot(x^2-2x+4)}{x^3}$$

Είναι $x^2-2x+4=(x^2-2x+1)+3=(x-1)^2+3>0$

Άρα $f'(x)=0 \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x^3}>0 \Leftrightarrow (x+2)\cdot x^3>0$$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x^3}<0 \Leftrightarrow (x+2)\cdot x^3<0$$

Προκύπτει ο επόμενος πίνακας μεταβολών:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x+2		-	0	+		+	
x^3		-		-	0	+	
f′		+	0	-	‖	+	
f		↗	τ.μ.	↘	‖	↗	

Επομένως η f:

- Είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -2]$ και $(0, +\infty)$.
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2, 0)$.
- Έχει τοπικό μέγιστο στη θέση $x_0 = -2$, την τιμή $f(-2) = -2 - \frac{4}{4} = -3$.

Β2. Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ είναι:

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left(1 + \frac{8}{x^3}\right)' = 8\left(\frac{1}{x^3}\right)' = 8\frac{-3x^2}{x^6} =$$

$$= -\frac{24}{x^4} < 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Άρα η f στρέφει τα κοίλα κάτω σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$, ενώ δεν παρουσιάζει σημείο καμπής.

Β3

α) Κατακόρυφες ασύμπτωτες:

$\lim\limits_{x \to -0} x = 0$, $\lim\limits_{x \to -0}\left(\frac{-4}{x^2}\right) = -\infty$, άρα $\lim\limits_{x \to -0} f(x) = -\infty$. Άρα η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 0$ (κατακόρυφος άξονας), στο $-\infty$.

β) Οριζόντιες ασύμπτωτες

β1) $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right) = 0$.

Άρα $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ και η f δεν έχει οριζόντια ασύπτωτη στο $-\infty$.

β2) $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right) = 0$.

Άρα $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ και η f δεν έχει οριζόντια ασύπτωτη στο $+\infty$.

γ) Πλάγιες ασύμπτωτες:

Είναι $\frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{4}{x^3} = \frac{x^3 - 4}{x^3}$.

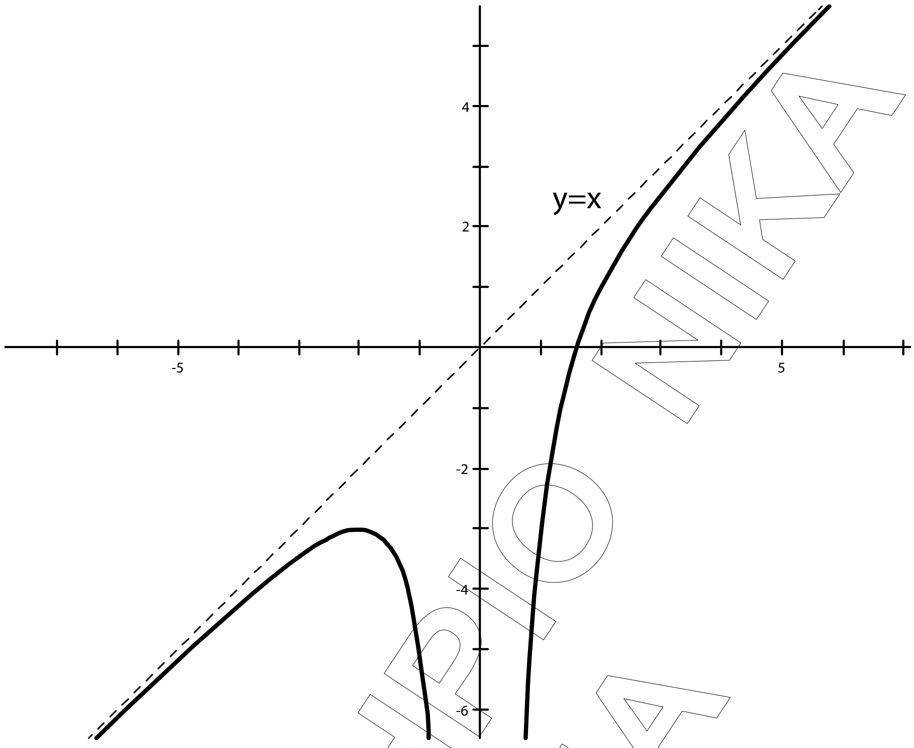
Άρα $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$. $(= \alpha)$

Επίσης $f(x) - x = \frac{-4}{x^3}$, άρα

$\lim\limits_{x \to +\infty}\left(f(x) - x\right) = 0$ και $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(f(x) - x\right) = 0$ $(= \beta)$

Άρα η f έχει πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y = x$ και στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Β4



$$f(x)=0 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{4}.$$

Επομένως η γραφική παράσταση της f τέμνει τον οριζόντιο άξονα στο σημείο

$$A\left(\sqrt[3]{4},0\right).$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το πρώτο τμήμα αφού είναι μήκους x και κατασκευάζουμε τετράγωνο. Η πλευρά του τετραγώνου θα είναι $\dfrac{x}{4}$, επομένως το εμβαδόν του τετραγώνου θα είναι

$$E_1=\left(\frac{x}{4}\right)^2=\frac{x^2}{16}.$$

Το δεύτερο τμήμα θα είναι μήκους $8-x$. Αν ρ η ακτίνα του κύκλου που κατασκευάζεται με το τμήμα αυτό, τότε θα είναι $2\pi\rho=8-x \Leftrightarrow \rho=\dfrac{8-x}{2\pi}$.

Άρα το εμβαδόν του κύκλου θα είναι

$$E_2=\pi\rho^2=\pi\left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2=\pi\frac{(8-x)^2}{4\pi^2}=\frac{(8-x)^2}{4\pi}=\frac{64+x^2-16x}{4\pi}.$$

Επομένως το άθροισμα των εμβαδών θα είναι

$$E(x)=E_1+E_2=\frac{x^2}{16}+\frac{64+x^2-16x}{4\pi}=$$

$$=\frac{\pi x^2+256+4x^2-64x}{16\pi}=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}$$

Είναι $x>0$ και $8-x>0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x>0 \\ x<8 \end{matrix} \Leftrightarrow 0<x<8$.

Γ2. Είναι $E'(x)=\dfrac{1}{16\pi}\left[2(\pi+4)x-64\right],\quad 0<x<8$.

Είναι $E'(x)\geq 0 \Leftrightarrow 2(\pi+4)x-64\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \dfrac{32}{\pi+4}$.

Άρα από τον πίνακα μεταβολών η E παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=\dfrac{32}{\pi+4}$

με τιμή $E=\left(\dfrac{32}{\pi+4}\right)=\dfrac{(\pi+4)\dfrac{32^2}{(\pi+4)^2}-64\cdot\dfrac{32}{\pi+4}+256}{16\pi}=...=\dfrac{16}{\pi+4}$

x	0		$\frac{32}{\pi+4}$		8
E΄		-	0	+	
E		↘		↗	

Τότε η πλευρά του τετραγώνου είναι $\dfrac{x}{4}=\dfrac{\dfrac{32}{\pi+4}}{4}=\dfrac{8}{\pi+4}$

και η διάμετρος του κύκλου είναι

$$2\rho=2\cdot\frac{8-x}{2\pi}=\frac{8-x}{\pi}=\frac{8-\dfrac{32}{\pi+4}}{\pi}=\frac{8\pi}{\pi(\pi+4)}=\frac{8}{\pi+4}.$$

Άρα το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

Γ3. Αρκεί ν. δ. ο. η εξίσωση $E(x)=5$ έχει μοναδική λύση στο $(0, 8)$.

Για το διάστημα $A_1=\left(0,\dfrac{32}{\pi+4}\right]$:

$$A_1=\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right]\xrightarrow[E\text{ γνησίως φθίνουσα}]{E\text{ συνεχής}}E(A_1)=\left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right),\lim_{x\to0^+}E(x)\right)=\left[\frac{16}{\pi+4},\frac{16}{\pi}\right)$$

διότι $\lim\limits_{x\to o^+}E(x)=\dfrac{16}{\pi}$. $\dfrac{16}{\pi+4}\approx 2,24$ και $\dfrac{16}{\pi}\approx 5,09$.

Άρα $5\in E(A_1)$ και άρα από Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών υπάρχει $x_0\in A_1 : E(x_0)=5$ και επειδή η E είναι ↓ στο A_1, άρα το x_0 είναι μοναδικό, στο διάστημα A_1.

Επίσης για το διάστημα $A_2=\left[\dfrac{32}{\pi+4},8\right)$:

$$A_2=\left[\frac{32}{\pi+4},8\right)\xrightarrow[E\text{ γνησίως αύξουσα}]{E\text{ συνεχής}}E(A_2)=\left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right),\lim_{x\to 8^-}E(x)\right)=\left[\frac{16}{\pi+4},4\right)\text{ διότι}$$

$$\lim_{x\to 8^-}E(x)=\lim_{x\to 8^-}\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}=\frac{(\pi+4)8^2-64\cdot 8+256}{16\pi}=4$$

$5\notin E(A_2)$ άρα η εξίσωση $E(x)=5$ είναι αδύνατη στο A_2.

Επομένως υπάρχει μοναδική τιμή $x_0\in\left(0,\dfrac{32}{\pi+4}\right): E(x_0)=5$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x)=2x^{x-a}-x^2,\quad x\in\mathbb{R}\quad$ με $\alpha>1$.

Είναι $f'(x)=2\cdot e^{x-a}-2x^2,\quad x\in\mathbb{R}$.

$$f''(x)=\left(2\cdot e^{x-a}-2x\right)'=2\cdot e^{x-a}-2=2\left(e^{x-a}-1\right),\quad x\in\mathbb{R}.$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow e^{x-a}-1=0\Leftrightarrow e^{x-a}=1\Leftrightarrow e^{x-a}=e^0\Leftrightarrow x-a=0\Leftrightarrow x=a$$

$$f''(x)>0\Leftrightarrow e^{x-a}-1>0\Leftrightarrow e^{x-a}>1\Leftrightarrow e^{x-a}>e^0\overset{e^x\text{ γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow}x-a>0\Leftrightarrow x>a$$

$$f''(x)<0\Leftrightarrow e^{x-a}-1<0\Leftrightarrow e^{x-a}<1\Leftrightarrow e^{x-a}<e^0\overset{e^x\text{ γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow}e-a<0\Leftrightarrow x<a$$

Συγκεντρωτικό:

x	-∞	α	+∞
f′(x)	-	0	+
f	⌒	Σ.Κ.	⌣

Άρα η f παρουσιάζει σημείο καμπής στη θέση $x_0=a$.

Δ2 **α)** $f'(x)=2\left(e^{x-a}-x\right),\ x\in\mathbb{R}$

βρίσκουμε το όριο της f' στο $x\to-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}e^{x-a}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e^a}\cdot e^x\right)=\frac{1}{e^a}\cdot 0=0,$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$. Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=+\infty$

β) $f'(a)=2\left(e^{a-a}-x\right)=2(1+a)<0$.

γ) Βρίσκουμε το όριο της f' όταν $x\to+\infty$

Είναι $f'(x)=\dfrac{2}{e^a}\cdot e^x-2x=x\cdot\left(\dfrac{2}{e^a}\cdot\dfrac{e^x}{x}-2\right)$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(e^x\right)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{e^a}\cdot\dfrac{e^x}{x}-2\right)=+\infty$

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$.

Η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, \alpha]$ (λόγω του Β1)

Άρα $f'\left((-\infty,a]\right)=\left[f'(a),\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)\right)=\left[2\cdot(1-a),+\infty\right)$.

Η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\alpha, +\infty)$ (λόγω του Δ1)

Άρα $f'\left([a,+\infty)\right)=\left[f'(a),\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)\right)=\left[2\cdot(1-a),+\infty\right)$, με $2(1-\alpha)<0$.

Άρα υπάρχει τιμή x_1 στο διάστημα $(-\infty, \alpha]$ ώστε $f'(x_1)=0$ και τιμή x_2 στο διάστημα $[\alpha, +\infty)$, ώστε $f'(x_2)=0$.

Όμως στο $(-\infty, \alpha]$ η f' είναι γνησίως φθίνουσα

άρα $x<x_1\Rightarrow f'(x)>f'(x_1)\Rightarrow f'(x)>0$

για $x>x_1\Rightarrow f'(x)<f'(x_1)\Rightarrow f'(x)<0$

Επίσης στο $[\alpha, +\infty)$ η f' είναι γνησίως αύξουσα

άρα $x<x_2\Rightarrow f'(x)<f'(x_2)\Rightarrow f'(x)<0$

για $x>x_2\Rightarrow f'(x)>f'(x_2)\Rightarrow f'(x)>0$

Δηλαδή προκύπτει ο επόμενος πίνακας μεταβολών της f'

x	$-\infty$		x_1		α		x_2		$+\infty$
f′	$+\infty$	+	0		-		0	+	$+\infty$
f		↗	τ.μ.		↘		τ.ε.	↗	

Προκύπτει ότι υπάρχουν μοναδικά x_1, x_2 τέτοια ώστε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2.

Δ3. Αφού $\alpha>1$ και f' γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, \alpha]$ ισχύει:

$a>1\Rightarrow f'(a)<f'(1)\Rightarrow 2-2a<2\cdot e^{1-a}-2\Rightarrow e^{1-a}>2-a$ (1).

Στο διάστημα (α, x_2) η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα το

$f\left((a,x_2)\right)=\left(\lim\limits_{x\to x_2^-}f(x),\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\right)=\left(\lim\limits_{x\to x_2^-}f(x),2-a^2\right)$, δηλαδή

$f(x)<2-a^2=f(a)$ (2)

Είναι $f(1)=2\cdot e^{1-a}-1$

Όμως λόγω της (1)

$e^{1-a}>2-a \Rightarrow 2e^{1-a}>2(2-a)\Rightarrow 2\cdot e^{1-a}-1>4-2a-1\Rightarrow f(1)>3-2a$.

Όμως $3-2a>2-a^2 \Leftrightarrow a^2-2a+1>0 \Leftrightarrow (a-1)^2>0$, που ισχύει.

Άρα $f(1)>f(a)$ (3)

Από (2) και (3) έπεται:

$f(x)<f(a)<f(1)$, άρα η $f(x)=f(1)$ είναι αδύνατη.

(β' τρόπος)

Επειδή $\alpha>1$ είναι $1-\alpha<0$ και $e^{1-a}<e^0 \Leftrightarrow e^{1-a}<1 \Leftrightarrow e^{1-a}-1<0$.

Όμως $f'(1)=2\left(e^{1-a}-1\right)$, άρα $f'(1)<0$.

Αν $1\le x_1$ επειδή η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, \alpha]$ άρα και στο $\left(-\infty,x_1\right]\subseteq\left(-\infty,a\right]$ είναι $f'(1)\ge f'(x_1)\Leftrightarrow f'(1)\ge 0$ άτοπο

Άρα $1>x_1$ ή $\alpha>1>x_1$.

Στο διάστημα $\left[a,x_2\right)\subseteq\left[x_1,x_2\right]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα επειδή

$a>1\Rightarrow f(a)<f(1)$ (1)

Επίσης είναι $f\left((a,x_2\right)=\left(f(x_2),f(\alpha)\right)$.

Άρα για κάθε $x\in(a,x_2)$ είναι $f(x)<f(a)<f(1)$ (λόγω της 1).

Άρα η $f(x)=f(1)$ είναι αδύνατη.

(γ' τρόπος)

$f(x)$ γνησίως φθίνουσα στο $\left[a,\ x_2\right]$ άρα

$f\left[a,x_2\right]=\left[f\left(x_2\right),f\left(\alpha\right)\right]$

Όμως $f\left(1\right)=2\cdot e^{1-\alpha}-1$ και $f(\alpha)=2-a^2$.

Θα δείξουμε ότι: $f\left(1\right)>f\left(\alpha\right)\Leftrightarrow 2\cdot e^{1-\alpha}-1>2-a^2 \Leftrightarrow 2\cdot e^{1-\alpha}+\alpha^2-3>0$,

με $\alpha>1$.

Έστω $\mathrm{K}\left(x\right)=2\cdot e^{1-x}+x^2-3$, $x\in\mathbb{R}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $K(x)>0$ για κάθε $x>1$.

Η $\mathrm{K}\left(x\right)$ παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγισίμων με:

$\mathrm{K}'\left(x\right)=-2\cdot e^{1-x}+2\cdot x$

Η $\mathrm{K}'\left(x\right)$ παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγισίμων με:

$\mathrm{K}''\left(x\right)=2\cdot e^{1-x}+2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα $\mathrm{K}'\left(x\right)$ γνησίως αύξουσα και ισχύει $\mathrm{K}'\left(1\right)=0$.

Για $x<1 \overset{\mathrm{K}'(x)\text{ γνησίως αύξουσα}}{\Longrightarrow} \mathrm{K}'\left(x\right)<\mathrm{K}'\left(1\right)=0$ άρα $\mathrm{K}\left(x\right)$ είναι γνησίως φθίνουσα

Για $x>1 \overset{\mathrm{K}'(x)\text{ γνησίωςαύξουσα}}{\Longrightarrow} \mathrm{K}'\left(x\right)>\mathrm{K}'\left(1\right)=0$ άρα $\mathrm{K}\left(x\right)$ είναι γνησίως αύξουσα

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$K'(x)$	$-$	0	$+$
$K(x)$	$\searrow$	τοπ. ελάχιστο	$\nearrow$

Η $K(x)$ έχει ελάχιστο το $K(1)=0$, και $K(x) > K(1) = 0$ για κάθε $x > 1$.

Δ4 Για $\alpha = 2$, είναι $f(x) = 2 \cdot e^{x-2} - x^2$.

Η εφαπτομένη της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 2$ είναι η ευθεία:

$$y - f(2) = f'(2)\cdot(x-2) \Leftrightarrow y-(-2) = -2(x-2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y + 2 = -2x + 4 \Leftrightarrow y = -2x + 2 \Leftrightarrow y = -2(x-1)$$

Επειδή η f στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα $[\alpha, +\infty) = [2, +\infty)$, προκύπτει ότι για $x \in [2, 3]$:

$$f(x) \geq -2(x-1) \Leftrightarrow f(x)\cdot\sqrt{x-2} \geq -2(x-1)\sqrt{x-2} \Leftrightarrow$$

$$f(x)\cdot\sqrt{x-2} - \left(-2(x-1)\sqrt{x-2}\right) \geq 0,$$

με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = 2$.

Άρα

$$\int_2^3 f(x)\cdot\sqrt{x-2} - \left(-2(x-1)\sqrt{x-2}\right) dx > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\, dx > \int_2^3 \left[-2(x-1)\sqrt{x-2}\right] dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\, dx > -2\int_2^3 (x-2+1)\sqrt{x-2}\, dx. \quad (1)$$

Για το ολοκλήρωμα του 2^{ου} μέλους θέτουμε $u = x - 2$, οπότε αυτό γράφεται:

$$\int_2^3 (x-2+1)\sqrt{x-2}\, dx = \int_0^1 (u+1)\sqrt{u}.$$

Έτσι η (1) γράφεται

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\, dx > -2\int_0^1 (u+1)\sqrt{u}$$

$$\Leftrightarrow \int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx > -2\int_0^1 \left(u^{3/2} + u^{1/2}\right) du,$$

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > -2\left[\frac{2}{5}u^{5/2}\right]_0^1 - 2\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_0^1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > -2\left(\frac{2}{5}\right) - 2\left(\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > -\frac{4}{5} - \frac{4}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > -\frac{32}{15}$$